Fonction exponentielle – Limites

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche : *(cliquez sur l'exercice pour un accès direct)*

- **Exercice 1 :** limites de référence de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$
- **Exercice 2 :** limites de fonctions composées avec l'exponentielle (fonctions de la forme e^u)
- **Exercice 3 :** étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$ (croissance comparée de e^x et x en $+\infty$)
- **Exercice 4 :** étude de $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$ (croissance comparée de e^x et x en $-\infty$)
- **Exercice 5 :** forme indéterminée et levée d'indétermination en factorisant par un polynôme
- **Exercice 6 :** forme indéterminée et levée d'indétermination à l'aide d'une croissance comparée
- **Exercice 7 :** forme indéterminée et levée d'indétermination en factorisant par e^x
- **Exercice 8 :** forme indéterminée et levée d'indétermination en factorisant par e^{-x}
- **Exercice 9 :** étude de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (dérivabilité de la fonction exponentielle en 0)
- **Exercice 10 :** limite d'un taux d'accroissement et nombre dérivé
- **Exercice 11 :** limite et continuité
- **Exercice 12 :** étude de limite et comportement asymptotique (asymptote horizontale)
- **Exercice 13 :** étude de limite et comportement asymptotique (asymptote verticale)
- **Exercice 14 :** théorème des gendarmes

Exercice 1 ***(2 questions)*** ***Niveau : moyen***

1) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
2) A l'aide d'un changement de variable, en déduire que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Correction de l'exercice 1 *↻ Retour au menu*

1) Démontrons que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Pour démontrer que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$, afin de comparer e^x et x.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant la somme de la fonction $u: x \mapsto e^x$ (fonction exponentielle) et de la fonction $v: x \mapsto -x$ (fonction linéaire). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x) + v'(x) = e^x - 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Rappel : $e^0 = 1$

On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Par ailleurs, f admet un minimum, atteint en 0, tel que $f(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.

Ainsi, il résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x > 0$, c'est-à-dire $e^x > x$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$ et comme $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'après le théorème de comparaison sur les limites, il vient que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Rappel : Théorème de comparaison en $+\infty$

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I =]A\,;\,+\infty[$. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) Déduisons-en que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Posons $X = -x$. Alors $\lim_{x \to -\infty} X = \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0^+$.

Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3-x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x^2-5x+4}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3x-7}}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}}$

Correction de l'exercice 2

↻ Retour au menu

Rappel : Limite de la composée de deux fonctions

a, b et c désignent des réels, $-\infty$ ou $+\infty$. f et g sont deux fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors on a :

$\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$.

$$\begin{array}{ccccc} (g\circ f) : x & \overset{f}{\mapsto} & f(x) & \overset{g}{\mapsto} & g\big(f(x)\big) \\ & & X & \mapsto & g(X) \end{array}$$

1)

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

2)

$$\lim_{x\to-\infty} (3x^2-5x+4) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty} (x^2) \times \lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{5}{x}\right) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{x^2}\right) = 0^+$. Ainsi, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 3$.

En outre, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2-5x+4) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2) \times \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$

Enfin, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x^2-5x+4} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

3)

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-7) = +\infty$ d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x-7} = 0^+$.

De plus, $\lim\limits_{X\to 0^+} e^X = e^0 = 1$ (par continuité de la fonction exponentielle en 0).

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{3x-7}} = \lim\limits_{X \to 0^+} e^X = 1$.

4)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-4x^5 - 2x + 3}{3x - 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5\left(-4 - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right)}{x\left(3 - \frac{7}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^4 \times \frac{-4 - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}}{3 - \frac{7}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^4 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{-4 - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}}{3 - \frac{7}{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{x^4}\right) = 0^-$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x^5}\right) = 0^+$. Ainsi, par somme des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-4 - \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right) = -4$.

D'autre part, par une analyse similaire, on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{7}{x}\right) = 3$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4-\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{3-\frac{7}{x}} = -\frac{4}{3}$.

Enfin, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \times \frac{-4-\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{3-\frac{7}{x}} \right) = -\frac{4}{3} \times \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = -\infty$.

On vient donc de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}\right) = -\infty$. Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, il résulte, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-4x^5-2x+3}{3x-7}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Exercice 3 ***(1 question)*** ***Niveau : difficile***

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Correction de l'exercice 3 *↻ Retour au menu*

Soit la fonction φ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$.

φ est la somme des fonctions $x \mapsto e^x$ (fonction exponentielle) et $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ (fonction polynôme), toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, la fonction φ est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, pour tout réel x positif,

$\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{2} \times 2x = e^x - x$

De même, φ' est la somme des fonctions $x \mapsto e^x$ (fonction exponentielle) et $x \mapsto -x$ (fonction affine), toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, la fonction φ' est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, pour tout réel x positif,

$\varphi''(x) = e^x - 1$

Or, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$,

$\varphi''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Il en résulte que φ' est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Or, $\varphi'(0) = e^0 - 0 = 1$, c'est-à-dire $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Par conséquent, φ est également croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Or, $\varphi(x) = e^0 - \frac{1}{2} \times 0^2 = 1$, c'est-à-dire $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x - \frac{1}{2}x^2 > 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, $e^x > \frac{1}{2}x^2$ ou bien, après division par x non nul : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

D'après le théorème de comparaison sur les limites, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Exercice 4 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Déduire de la limite de l'exercice précédent la limite suivante : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

Correction de l'exercice 4 — *↻ Retour au menu*

Soit l'expression xe^x, définie pour tout réel x.

En effectuant le changement de variable $= -x$ ($X \in \mathbb{R}$), alors $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\frac{X}{e^X}\right) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{X}{e^X}\right) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^X}{X}}\right)$.

Or, d'après l'exercice précédent, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{Y \to +\infty} \left(\frac{1}{Y}\right) = 0$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^X}{X}}\right) = \lim\limits_{Y \to +\infty} \left(\frac{1}{Y}\right) = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Rappel : Croissances comparées de la fonction exponentielle et d'une fonction puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

On dit que « la fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances ».

Exercice 5 *(1 question)* ***Niveau : facile***

Etudier les limites de la fonction f, définie par $f(x) = 2e^x - 3x$, aux bornes de son ensemble de définition.

Correction de l'exercice 5 *↻ Retour au menu*

Rappel : Formes indéterminées

$\underbrace{\infty - \infty}_{somme}$ $\underbrace{0 \times \infty}_{produit}$ $\underbrace{\frac{\infty}{\infty}}_{quotient}$ $\underbrace{\frac{0}{0}}_{quotient}$

La fonction f, définie par $f(x) = 2e^x - 3x$, est définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ comme somme des fonctions u et v respectivement définies sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $u(x) = 2e^x$ (produit d'un réel par la fonction exponentielle) et $v(x) = -3x$ (fonction linéaire).

1) Déterminons tout d'abord la limite de f en $-\infty$.

D'une part, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$.

D'autre part, $\lim_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$.

Ainsi, par somme des limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2e^x - 3x) = \lim_{x\to-\infty} (2e^x) + \lim_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$.

2) Déterminons désormais la limite de f en $+\infty$.

D'une part, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty$.

Ainsi, par somme des limites, on aboutit à une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$. Levons cette indétermination en factorisant par x.

Pour tout réel x non nul,

$$f(x) = 2e^x - 3x = x\left(2\frac{e^x}{x} - 3\right)$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{e^x}{x} - 3\right) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Ainsi, par produit des limites, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(2\frac{e^x}{x} - 3\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} (x) \times \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{e^x}{x} - 3\right) = +\infty$

Exercice 6 ***(1 question)*** ***Niveau : facile***

Etudier les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{e^{-x+7}}{5x}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

Correction de l'exercice 6 *↻ Retour au menu*

Etudions les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{e^{-x+7}}{5x}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

1) Déterminons tout d'abord la limite de f en $+\infty$.

D'une part, $\lim_{x\to+\infty}(-x+7)=-\infty$. De plus, $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x\to+\infty}e^{-x+7}=0$.

D'autre part, $\lim_{x\to+\infty}(5x)=+\infty$. De plus, $\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5x}=0$.

Ainsi, par produit des limites, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x+7}}{5x}=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x+7})\times\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5x}\right)=0$.

2) Déterminons désormais la limite de f en $-\infty$.

D'une part, $\lim_{x\to-\infty}(-x+7)=+\infty$. De plus, $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x\to-\infty}e^{-x+7}=+\infty$.

D'autre part, $\lim_{x\to-\infty}(5x)=-\infty$. De plus, $\lim_{X\to-\infty}\frac{1}{X}=0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5x}=0$.

Ainsi, par produit des limites, on aboutit à une forme indéterminée du type $\infty\times 0$. Levons cette indétermination en utilisant une croissance comparée.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*-\{7\}$,

$$f(x)=\frac{e^{-x+7}}{5x}=\frac{e^{-x+7}}{5x}\times\frac{-x+7}{-x+7}=\frac{e^{-x+7}}{-x+7}\times\frac{-x+7}{5x}=\frac{e^{-x+7}}{-x+7}\times\frac{x\left(-1+\frac{7}{x}\right)}{5x}=\frac{e^{-x+7}}{-x+7}\times\frac{-1+\frac{7}{x}}{5}$$

Or, $\lim_{x\to-\infty}(-x+7)=+\infty$. De plus, $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x+7}}{-x+7}\right)=+\infty$.

En outre, $\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x}=0$ d'où $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{7}{x}}{5}=-\frac{1}{5}$.

Ainsi, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+7}}{5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x+7}}{-x+7}\right) \times \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-1+\frac{7}{x}}{5}\right) = -\infty$.

Exercice 7 *(1 question)* *Niveau : facile*

Etudier les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

Correction de l'exercice 7 *↻ Retour au menu*

Etudions les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

1) Déterminons tout d'abord la limite de f en $-\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$. Il vient alors que $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+3) = 3$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1) = -1$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}+3}{e^x-1} = \frac{3}{-1} = -3$.

2) Déterminons désormais la limite de f en $+\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}+3) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1) = +\infty$.

Ainsi, par quotient des limites, on aboutit à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Levons cette indétermination en factorisant par e^x non nul.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1} = \frac{e^{2x}+3}{e^x-e^0} = \frac{e^{x+x}+3e^{x-x}}{e^x-e^{x-x}} = \frac{e^xe^x+3e^xe^{-x}}{e^x-e^xe^{-x}} = \frac{e^x(e^x+3e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{e^x+3e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-x} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+3e^{-x}) = +\infty$.

De plus, on vient de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+3e^{-x}}{1-e^{-x}} = +\infty$.

Exercice 8 ***(1 question)*** ***Niveau : facile***

Etudier les limites de la fonction f, définie par $f(x)=\frac{2e^{-x}+1}{e^{-x}+4}$, aux bornes de son ensemble de définition.

Correction de l'exercice 8 *↻ Retour au menu*

1) Commençons par préciser l'ensemble de définition de la fonction f.

La fonction f est le quotient de la fonction $u: x \mapsto 2e^{-x}+1$, définie sur $\mathbb{R}$, par la fonction $v: x \mapsto e^{-x}+4$, définie sur $\mathbb{R}$ et strictement positive (donc non nulle). Par conséquent, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Il convient par conséquent d'étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminons tout d'abord la limite de f en $+\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

Il vient alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{-x}+1)=1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+4)=4$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{-x}+1}{e^{-x}+4}=\frac{1}{4}$.

3) Déterminons enfin la limite de f en $-\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.

Il vient alors que $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{-x}+1)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+4)=+\infty$.

Ainsi, par quotient des limites, on aboutit à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Levons cette indétermination en factorisant par e^{-x} non nul.

Pour tout x réel,

$$f(x)=\frac{2e^{-x}+1}{e^{-x}+4}=\frac{e^{-x}(2+e^{x})}{e^{-x}(1+4e^{x})}=\frac{2+e^{x}}{1+4e^{x}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+e^{x})=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+4e^{x})=1$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2+e^{x}}{1+4e^{x}}=2$.

Exercice 9 *(1 question)* *Niveau : facile*

Etudier $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Correction de l'exercice 9 *↻ Retour au menu*

Rappel : Limite d'un taux d'accroissement (Dérivabilité en un point – Nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur I et soit $a\in I$.

Pour tout $x\in I$, tel que $x\neq a$, le nombre noté $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé taux d'accroissement de f en a

Si ce taux d'accroissement admet une limite finie l en a, on dit que f est dérivable en a. Autrement dit, f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a}\underbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{taux\\ d'accroissement\\ de\ f\ en\ a}}=l$ (l réel fini).

Rappel : Ce nombre réel l est alors appelé nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (donc continue en 0), $\lim\limits_{x\to 0}e^x=e^0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$. Il vient alors immédiatement que $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. Levons cette indétermination en mettant en évidence la limite d'un taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$$

On reconnait ici l'écriture de la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, qui n'est autre que le nombre dérivé de l'exponentielle en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e'(0)=e(0)=1$$

Rappel : Dérivabilité et dérivée de la fonction exponentielle

La fonction $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $(e^x)'=e^x$.

Exercice 10 *(1 question)* *Niveau : difficile*

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{2x}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$

Correction de l'exercice 10 ↻ *Retour au menu*

1) Etudions $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{2x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{e^{5x}-1}{2x} = \frac{5}{2} \times \frac{e^{5x}-1}{5x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to 0} 5x = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} = 1$.

Enfin, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{2x} = \frac{5}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} = \frac{5}{2}$.

2) Etudions $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$. Il vient alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = \frac{e^{x^2}-1}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \frac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times 2 \times \frac{x^2}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times 2 \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2 \times \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

a) Etudions tout d'abord $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ (par continuité de la fonction carré en 0) et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$ donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$.

b) Etudions dorénavant $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi\ /k \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}\right)^2$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$ (par continuité de la fonction affine $x \mapsto \frac{x}{2}$ en 0).

D'autre part, $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin(X)}{X} = \lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin(X)-\sin(0)}{X-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$. (On reconnait en effet ici l'écriture de la limite du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.)

Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$.

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$. Comme, de plus, $\lim\limits_{X\to 1}\left(\frac{1}{X^2}\right) = 1$ (par continuité de la fonction $X \mapsto \frac{1}{X^2}$ en 1), d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, il résulte que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = 1$.

c) Concluons.

Ainsi, par produit des limites,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\left(2 \times \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\right) = 2 \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right) \times \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 = 2$$

Exercice 11 *(3 questions)* *Niveau : facile*

On se propose d'étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1-2x & si\ x \leq 2 \\ e^{x-2}-4 & si\ x > 2 \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2) Etudier la continuité de la fonction f en 2.
3) Conclure.

Correction de l'exercice 11

↻ Retour au menu

1) Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Rappel : Continuité d'une fonction composée sur un intervalle

Soient f et g deux fonctions.

Si f est continue sur I et si g est continue sur $f(I)$,

alors $g \circ f$ est continue sur I.

$$(g \circ f) : x \overset{f}{\mapsto} f(x) \overset{g}{\mapsto} g(f(x))$$

Pour tout $x \in]-\infty\,; 2]$, $f(x) = 1 - 2x$. Sur cet intervalle, f est une fonction affine ; elle est donc continue.

Pour tout $x \in]2\,; +\infty[$, $f(x) = e^{x-2} - 4$. Sur cet intervalle, f est continue comme étant la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - 2$, par la fonction v définie sur $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ par $v(x) = e^x - 4$.

On en déduit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

2) Etudions désormais la continuité de la fonction f en 2.

Rappel : Continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur I et soit $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f a une limite en a égale à $f(a)$, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. En particulier f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Remarque :

✓ On note indifféremment la limite à gauche de la fonction f en a : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

✓ On note indifféremment la limite à droite de la fonction f en a : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Pour tout $x \in]-\infty\,;2]$, $f(x) = 1 - 2x$. Comme $\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x) = -4$, alors $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(1-2x) = -3$.

Pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$, $f(x) = e^{x-2} - 4$. Comme $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+$, alors d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions puis d'après la continuité de la fonction exponentielle en 0, il vient que $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{x-2} = \lim\limits_{X\to 0^+} e^X = e^0 = 1$. Finalement, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(e^{x-2} - 4) = -3$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -3$. La fonction f est donc continue en 2.

3) D'après la première question, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et, d'après la seconde question, f est également continue en 2. Il en résulte que fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

1) Etudier les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}+3}{e^{x}-1}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) En déduire l'existence d'une asymptote à C_f, courbe représentative de la fonction f.

Correction de l'exercice 12 — *↻ Retour au menu*

1) Etudions les limites de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}+3}{e^{x}-1}$, en $-\infty$ et en $+\infty$.

Etudions en premier lieu la limite de la fonction f en $-\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$. Il vient alors que $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+3)=+\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-1)=-1$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}+3}{e^{x}-1}=-\infty$.

Etudions en second lieu la limite de la fonction f en $+\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. Il vient alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+3)=3$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-1)=+\infty$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+3}{e^{x}-1}=0$.

2)

Rappel : Asymptote horizontale à une courbe

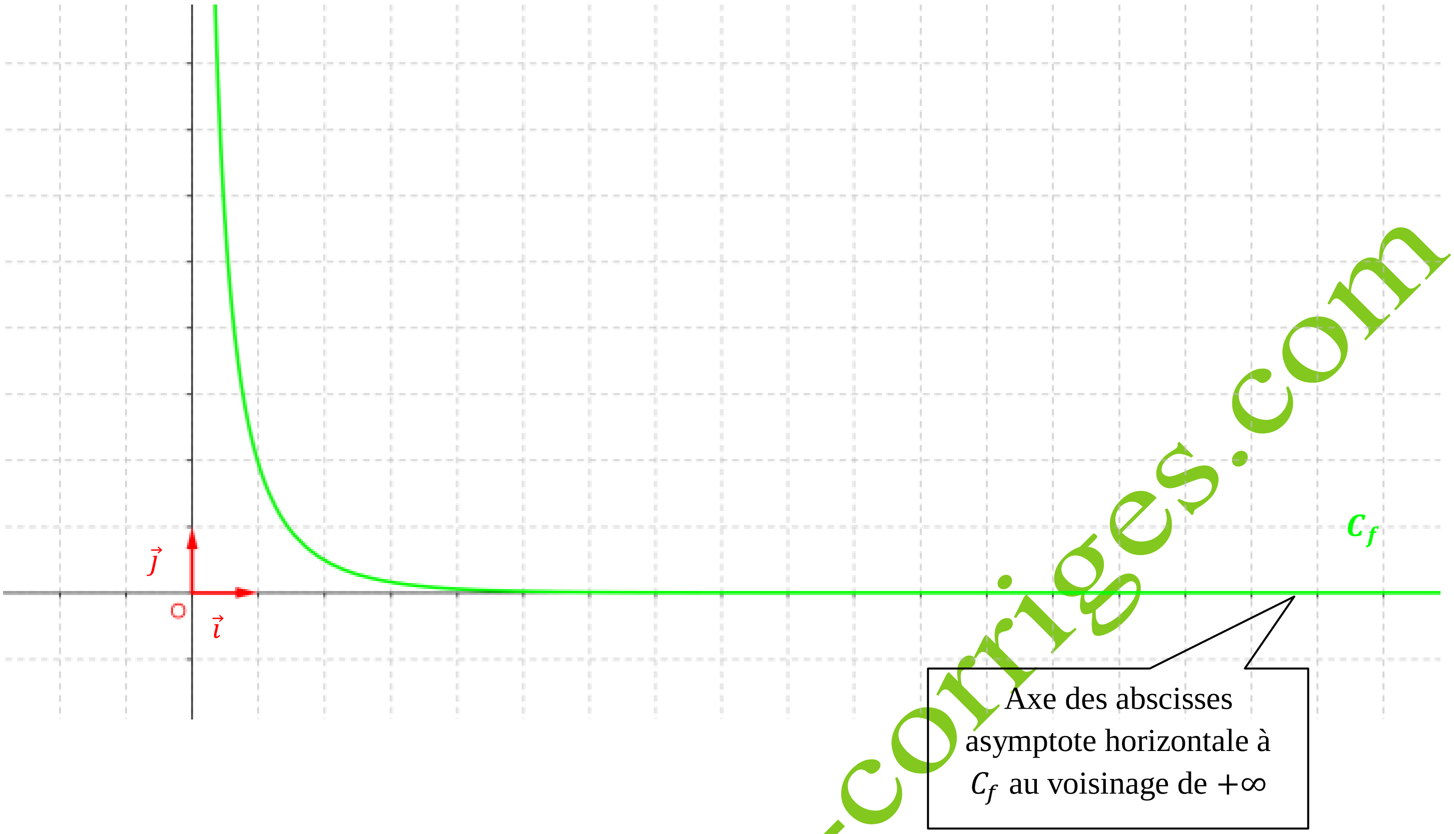
Soit a un réel.

Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=a$ au voisinage de $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=a$ au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ donc C_f, courbe représentative de la fonction f, admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$, au voisinage de $+\infty$.

Remarque : Cette asymptote horizontale est l'axe des abscisses du repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.



Remarque : C_f admet également une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Exercice 13 *(2 questions)* — *Niveau : facile*

1) Etudier la limite de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{5e^x}{1-e^x}$, en 0.
2) En déduire l'existence d'une asymptote à C_f, courbe représentative de la fonction f.

Correction de l'exercice 13 — *↻ Retour au menu*

1) Etudions la limite de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{5e^x}{1-e^x}$, en 0.

D'une part, $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ (par continuité de la fonction exponentielle en 0), d'où $\lim_{x\to 0}(5e^x) = 5$.

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+}(e^x) = 1^+$, d'où $\lim_{x\to 0^+}(-e^x) = -1^-$. Finalement, $\lim_{x\to 0^+}(1-e^x) = 0^-$.

Ainsi, par quotient des limites, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{5e^x}{1-e^x} = \lim_{X\to 0^-} \frac{5}{X} = -\infty$.

De même, on montre que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

En effet, $\lim_{x\to 0^-}(e^x) = 1^-$, d'où $\lim_{x\to 0^-}(-e^x) = -1^+$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0^-}(1-e^x) = 0^+$. Ainsi, par quotient des limites, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{5e^x}{1-e^x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{5}{X} = +\infty$.

2)

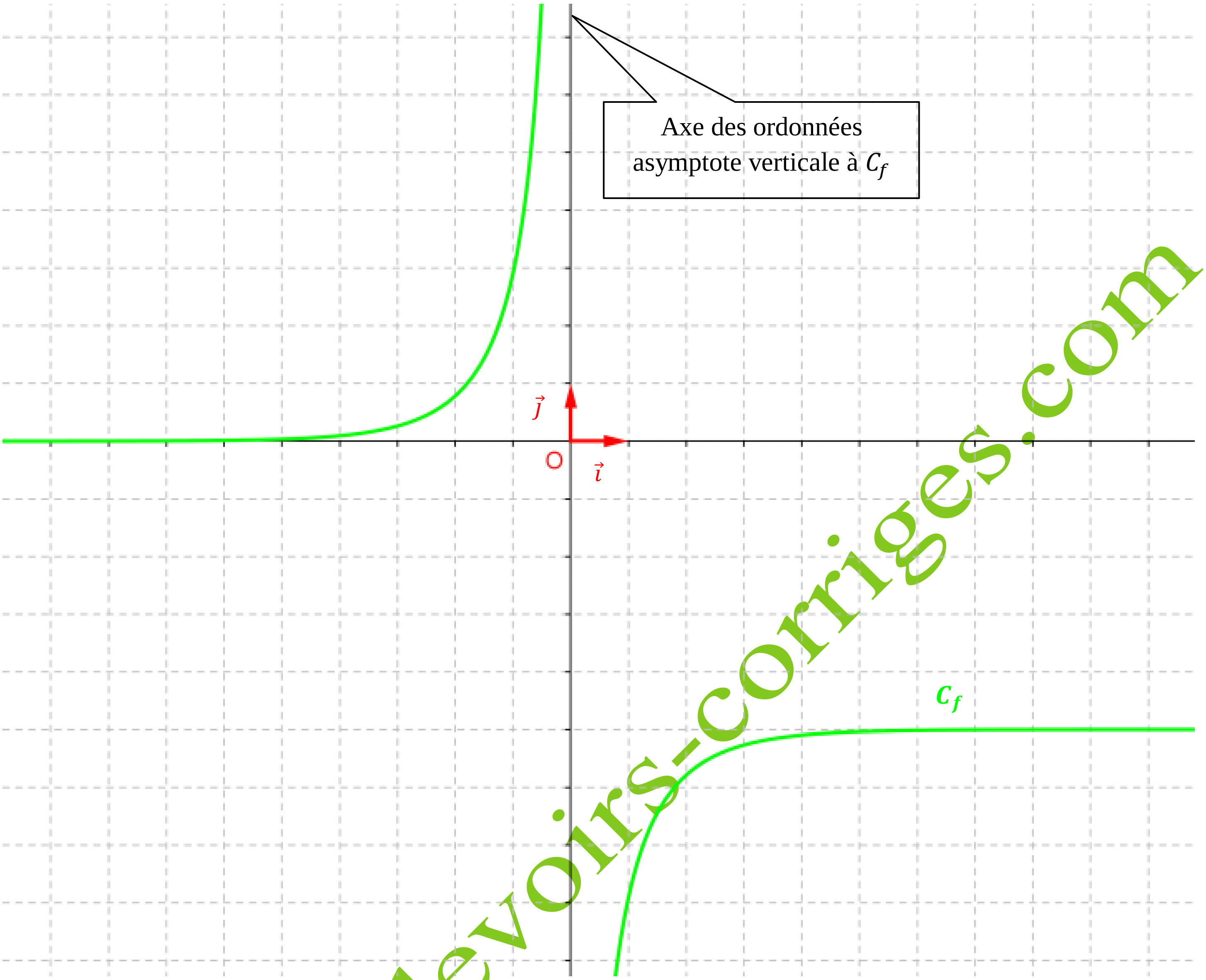
Rappel : Asymptote verticale à une courbe

Soit a un réel.

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

D'après la question précédente, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ (et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$) donc C_f, courbe représentative de la fonction f, admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Remarque : Cette asymptote verticale est l'axe des ordonnées du repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.



Remarque : C_f admet également l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et la droite d'équation $y = -5$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Exercice 14 *(2 questions)* *Niveau : facile*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \cos x$.

1) Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) Qu'en déduire pour C_f, la courbe représentative de la fonction f ?

Correction de l'exercice 14 *↻ Retour au menu*

1) Etudions $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Rappel : Théorème des gendarmes

Soient f, u et v trois fonctions et soit l un nombre réel.

Si, pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $-1 \times e^{-x} \leq \cos x \times e^{-x} \leq 1 \times e^{-x}$, c'est-à-dire $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

En outre, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$. Donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Il en résulte également que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, il vient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2) On vient de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc C_f, la courbe représentative de la fonction f, admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.